Egzamin z Analizy Matematycznej, 18 czerwca 2015r.

Czas trwania: 150 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na osobnych kartkach, podpisanych imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.

1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{k}{n^2}.$$

2. Wyznaczyć liczbę dodatnią x, dla której wartość całki

$$\int_0^{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{2\pi t}{t+2}\right)\mathrm{d}t$$

jest największa.

3. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^1\frac{x^a|\sin x|^b}{\exp(x^2)-1}\mathrm{d}x,$$

gdzie a, $b>0$ są ustalonymi parametrami.

4. Dana jest krzywa zamknięta $\varphi(t)=(\cos^3 t,\sin^3 t)$, $t\in[0,2\pi]$.

a) Obliczyć długość tej krzywej.

b) Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót φ wokół osi OX.

5. Rozważmy szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n.$$

a) Wyznaczyć jawny wzór na sumę tego szeregu.

b) Czy szereg ten jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$?

6. Dla ustalonej funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i $n=1,2,\ldots$, określamy

$$f_n(x)=\frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}f(t)\mathrm{d}t,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

a) Dowieść, że $(f_n)_{n\geq 1}$ zbiega punktowo do f.

b) Niech M będzie ustaloną liczbą dodatnią. Dowieść, że $(f_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny do f jednostajnie na $[-M,M]$.